Exercices d'application : Questions courtes, hauts-parleurs, lecture sur une cuve à ondes, ultrasons, Rayleigh,

Culture en sciences physiques : Questions courtes, accordage, stroboscope, tâche de diffraction, Rayleigh, courbes de Lissajous

Corrigés en TD : Hauts-parleurs, accordage, lecture sur une cuve à ondes, ultrasons, Rayleigh, tâche de diffraction

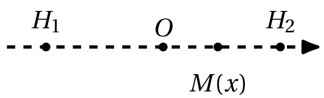
Exercice 1 : Questions courtes

1. À quelle distance se trouve un orage si on entend le tonnerre 5 s après avoir vu l'éclair ?
2. Que se passe-t-il si on inverse les fils de l'un des hauts-parleurs d'une paire.
3. Est-il important de se placer en face de hauts-parleurs musicaux pour bien entendre. On pourra distinguer selon la fréquence du son.

Exercice 2 : Hauts-parleurs et onde stationnaire

On dispose deux hauts-parleurs H_1 et H_2 face à face sur un axe (Ox), espacés d'une distance $d = H_1H_2$ variable. Les deux hauts-parleurs émettent des ondes sonores sinusoïdales (dans la direction des x croissants et décroissants) de même fréquence $f = 2\,\mathrm{kHz}$, de même amplitude notée A_0 et en phase. La vitesse des ondes sonores est $c = 330\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

On note O le milieu du segment $[H_1; H_2]$ et on place un microphone M d'abscisse notée x sur la droite joignant les deux hauts-parleurs.



1. Établir l'expression de l'onde reçue par le microphone en fonction de sa position x et déterminer son amplitude $A(x)$ dans les trois zones :
   - $x \geqslant d/2$
   - $x \leqslant -d/2$
   - $x \in [-d/2; d/2]$
2. Pour quelles valeurs de d est-elle nulle en $x = d/4$? Tracer dans ce cas l'allure des variations de $A(x)$. Justifier qu'on parle dans cette zone d'*onde stationnaire*
3. Comment $A(x)$ varie-t-elle en fonction de x pour $x \geqslant d/2$ et pour $x \leqslant d/2$? Pour quelles valeurs de d est-elle maximale ?
4. On choisit $d = 46\,\mathrm{cm}$. Quel doit être l'avance de l'onde de H_2 par rapport à celle de H_1 pour que l'amplitude du signal soit nulle pour $x \geqslant d/2$.

Exercice 3 : Onde unidimensionnelle

Deux sources ponctuelles distantes d'une distance d émettent chacune une onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle de même fréquence f et de même amplitude se propageant à la même vitesse c, dans le même sens. Leur déphasage à l'origine est pris nul.

1. Placer, pour chaque onde séparément, les points où la perturbation est maximale :
   - à $t = 0$,
   - à $t = 1/(2f)$,
   - à $t = 1/(4f)$.
2. En déduire l'allure de la somme des deux ondes pour $d = \frac{c}{f}; \frac{c}{2f}; \frac{c}{4f}$.
3. Retrouver ce résultat en écrivant le champ des perturbations.

Exercice 4 : Cuve à ondes et stroboscope

On observe sur une cuve à ondes une distance entre crêtes de 5 mm et la figure est immobile pour une fréquence du stroboscope de 80 Hz. Que peut-on en déduire concernant la vitesse des ondes se propageant à la surface ?

Exercice 5 : Accordage d'instrument à cordes

On rappelle qu'un intervalle d'une octave correspond à une multiplication de la fréquence par 2. Dans la gamme dite *tempérée* une octave est partagée en 12 intervalles définissant des rapports entre fréquences égaux pour former les notes :

do do♯ ré ré♯ mi fa fa♯ sol sol♯ la la♯ si do

1. Les quatre cordes d'un alto vibrent aux fréquences ci-dessous, données à $\pm 0{,}1\,\mathrm{Hz}$:

note	do2	sol2	ré3	la3
fréquence (Hz)	130,8	196,0	293,7 Hz	440 Hz

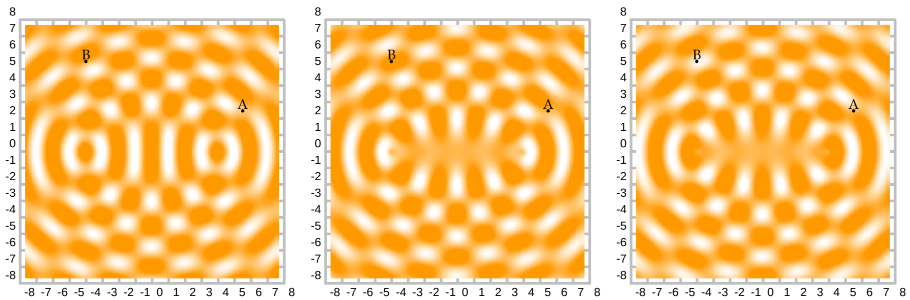
   Vérifier, sur l'exemple du Do2 et du La3, que cet accordage suit la gamme tempérée.
2. Déterminer les fréquences des harmoniques des cordes du do2 et du sol2. En déduire que si l'on joue ces deux notes simultanément, on entendra un battement. Préciser sa fréquence.

3. On choisit d'accorder l'alto en prenant pour référence le la3 à 440 Hz et en changeant légèrement les fréquences des autres cordes pour supprimer ces battements. Quelles seront les fréquences des trois autres cordes ? Quel sera le rapport des fréquences entre deux cordes consécutives ? Ces intervalles sont appelés *quintes justes*.

Exercice 6 : Lecture sur une cuve à ondes

Les images de la figure 1 représentent l'état de la surface d'une cuve à ondes à différents instants. Une zone claire représente une crête et une zone sombre un creux. La surface est excitée par deux sources, distances de 8 cm.

1. On a mesuré une vitesse de propagation de $0{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Déterminer la fréquence à laquelle vibrent les sources.
2. Les trois images de la figure 1 ont été prises à des intervalles de temps réguliers. On note Δt la durée entre deux images. Déterminer la plus petite valeur de Δt possible et classer les trois images par ordre chronologique.
3. (a) Comment varie l'amplitude de l'onde au point A avec le temps ? Justifier ce comportement en calculant le déphasage en ce point entre les ondes issues des deux sources.
   (b) Même question pour le point B.



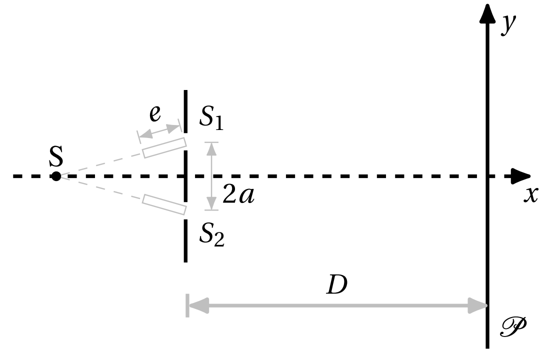
(a) (b) (c)

FIG. 1 : Simulations d'une cuve à ondes. Les échelles sont en cm.

Exercice 7 : Interféromètre de Rayleigh

On considère un dispositif de trous d'Young auquel on rajoute deux cylindres de même longueur $e = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ devant chacun des trous, distants de $2a = 2{,}0\,\mathrm{cm}$.

Les cylindres sont initialement remplis d'air. On éclaire le dispositif avec une source lumineuse de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 632{,}8\,\mathrm{nm}$ et on note $D = 30\,\mathrm{cm}$ la distance entre le plan des trous et l'écran sur lequel on observe l'intensité lumineuse.



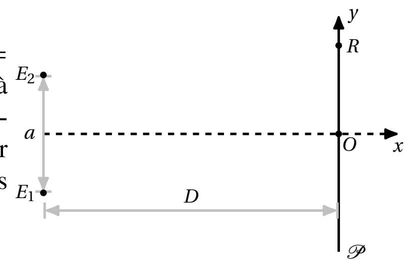
1. Établir l'expression de l'interfrange dans le plan de l'écran $\mathscr{P}$ et calculer sa valeur pour $n = 1$ à l'approximation $D \gg y$ et $D \gg a$.
2. On fait le vide par pompage dans le tube placé devant le trou S_1.
   (a) Dans quel sens se déplace le système de franges ?
   (b) On voit défiler entre 21 et 22 franges au centre de l'écran pendant le pompage jusqu'à atteindre le vide. En déduire la valeur de l'indice n de l'air.

Remarque : Il s'agit ici d'une adaptation du véritable interféromètre de Rayleigh, dans lequel on utilise un laser et dont les tubes sont beaucoup plus longs (pour pouvoir réaliser le pompage entre autres).

Exercice 8 : Trous d'Young et ultrasons

On alimente deux émetteurs d'ultrasons à l'aide d'un générateur basses fréquences (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de fréquence f en les branchant en dérivation. La célérité des ondes sonores est $330\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Les émetteurs sont séparés d'une distance $a = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Un récepteur R d'ultrasons est placé à une distance d_1 de l'émetteur E_1 et à une distance d_2 de l'émetteur E_2. On peut le déplacer dans le plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan des émetteurs situé à une distance $D = 1{,}0\,\mathrm{m}$ de celui-ci.



On relève les positions de R correspondant à un signal d'amplitude maximale. Ces résultats sont reportés dans la table ci-dessous.

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
y(cm)	$-48,2$	$-34,2$	$-16,2$	0	$17,4$	$31,2$	$48,7$

1. Pourquoi branche-t-on les émetteurs en dérivation ? Déterminer l'expression de l'intensité sonore reçue en un point de coordonnée y dans le plan $\mathscr{P}$ en utilisant la formule de Fresnel. On effectuera les approximations pertinentes.

2. Les positions sont repérées avec une incertitude de l'ordre de 5 mm. En déduire la fréquence de l'onde ultrasonore ainsi que l'incertitude sur sa détermination.

3. Déterminer les nouvelles positions des maxima d'amplitude sonore si :

   - on place l'écran à $D = 1{,}5\,\mathrm{m}$,
   - ou on rapproche les source à $a = 3{,}0\,\mathrm{cm}$
   - ou on remonte selon Oy les deux sources de 2 cm

   Tracer, en les superposant, les courbes de l'intensité sonore en fonction de y dans les quatre cas.

Exercice 9 : Interférences à l'infini et tâche centrale de diffraction

On considère la diffraction d'une onde plane de longueur d'onde λ se propageant selon $\vec{e_z}$ tombant normalement sur une fente infiniment large selon la dimension x et de largeur a selon y. On cherche à retrouver l'expression de la demi-largeur angulaire du cône de diffraction, notée α.

1. On modélise la fente par un ensemble de sources ponctuelles. Déterminer la différence de marche à l'infini entre la source au centre de la fente et une source du bord dans une direction θ quelconque.

2. En déduire l'expression de l'angle α pour lequel les interférences entre toutes les sources de la fente sont destructives. Commenter et retrouver ce résultat par une construction de Fresnel en considérant un ensemble de $N \gg 1$ sources ponctuelles équiréparties sur la fente.

Exercice 10 : Onde stationnaire

On considère deux ondes unidimensionnelles contrapropageantes. L'impulsion sur chacune est formée d'une seule période d'une oscillation rectangulaire symétrique, de même fréquence f.

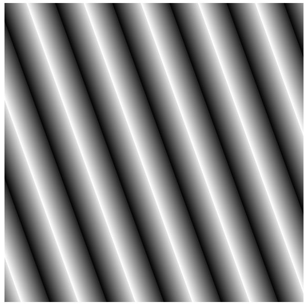
Tracer l'allure de l'onde somme :

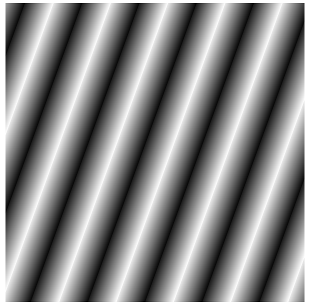
- quand les deux fronts se rencontrent (instant qu'on définira comme $t = 0$),
- pour $t = T/4$,
- pour $t = 3T/8$,
- pour $t = T/2$,
- pour $t = 3T/4$,
- pour $t > 2T$

On distinguera deux cas selon la phase relative des deux ondes.

Exercice 11 : Ondes unidimensionnelles croisées

On considère deux ondes planes unidimensionnelles sinusoïdales de même fréquence, de même amplitude et contrapropageantes dont les directions de propagation font un angle α assez faible entre elles : la direction de l'une est donnée par $\cos(\alpha/2)\vec{e}_x + \sin(\alpha/2)\vec{e}_y$ pour l'une et $-\cos(\alpha/2)\vec{e}_x + \sin(\alpha/2)\vec{e}_y$ pour l'autre (voir ci-dessous) :





1. Représenter les fronts où la perturbation est respectivement maximale, minimale et nulle pour chaque onde aux instants $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$. En déduire l'allure de la figure d'interférences.

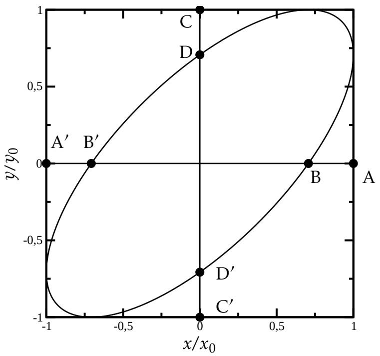
2. Retrouver ce résultat en déterminant l'expression du champ des perturbations.

Exercice 12 : Courbes de Lissajous

Un point est animé d'un mouvement plan. Ses coordonnées x et y sont données par :

$$x = x_0 \cos\omega_x t \qquad y = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi)$$

Les trajectoires obtenues sont nommées *courbes de Lissajous*.



1. À quelles conditions la trajectoire est-elle fermée ? Quelle caractéristique présente alors le mouvement ?
2. Tracer l'allure de la trajectoire correspondant à $\omega_y = 3\omega_x; \varphi = 0$
3. Donner les équations des trajectoires correspondant à $\omega_x = \omega_y$ et $\varphi = 0$ puis $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$, et tracer ces courbes.
4. ⚡ On peut montrer que la trajectoire est toujours une ellipse si $\omega_x = \omega_y$. Montrer que dans ce cas a : $|\sin\varphi| = \frac{B'B}{A'A} = \frac{D'D}{C'C}$, ces distances étant définies sur la trajectoire ci-dessus, pour $\varphi = \pi/4$.

Correction de l'exercice 1

1. La vitesse du son ($c_s = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) est très faible devant celle de la lumière ($c_\ell = 3{,}00\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). On peut donc considérer que cette dernière se propage instantanément. Lors d'un orage, l'éclair et le coup de tonnerre sont produits quasi-simultanément. La lumière de l'éclair parvient instantanément à un observateur situé à une distance d alors que le tonnerre arrivera au bout de la durée $\Delta t = d/c_s$. Pour $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$, on calcule $d = c_s\Delta t = 1{,}7\,\mathrm{km}$.

2. Dans le cas d'un son en mono, le signal est le même sur les deux haut-parleurs. Inverser les deux fils rouge et noir sur l'un des haut-parleurs revient à mettre le signal en opposition de phase entre les deux hauts-parleur. En un point équidistant des deux haut-parleur, on aura donc une interférence destructive, *ie* pas de son. Cette extinction n'est cependant pas totale pour un auditeur puisque la taille de son crâne n'est pas négligeable devant la longueur d'onde d'un signal audible : l'interférence ne peut pas être destructive dans les deux oreilles en même temps.

3. Si l'on n'est pas en face d'un haut-parleur, il faut compter sur la diffraction des ondes sonores pour entre le son. Avec une célérité de $c = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, on calcule les longueurs d'onde : $\lambda(20\,\mathrm{Hz}) = 17\,\mathrm{m}$ et $\lambda(20\,\mathrm{kHz}) = 1{,}7\,\mathrm{cm}$. Les sons audibles les plus aigus ont donc des longueurs d'onde trop petites pour être efficacement diffractés et ne pourront être bien entendus qu'en face d'un haut-parleur. Les plus graves seront en revanche très bien diffractés.

Correction de l'exercice 2

Comme les deux sources sont en phases, on choisit l'origine des temps pour que la phase de chacune soit nulle à $t = 0$ au point origine de chaque onde.

1. Pour la source H_2, l'onde est :

   - progressive pour $x \geqslant d/2$. L'amplitude de la perturbation s'exprime selon :
   $$A_2(x) = A_0\cos(\omega t - k(x-d/2)),$$
   - régressive pour $x \leqslant d/2$. L'amplitude de la perturbation s'exprime selon :
   $$A_2(x) = A_0\cos(\omega t + k(x-d/2)).$$

   En effet la distance entre la source et le point M est $|x-d_2|$ qui vaut $x-d/2$ ou $d/2-x$ selon le signe de $x-d/2$.

   Pour l'onde issue de H_1, on adapte en :

   - pour $x \geqslant -d/2$:
   $$A_1(x) = A_0\cos(\omega t - k(x+d/2)).$$
   - pour $x \leqslant -d/2$:
   $$A_1(x) = A_0\cos(\omega t + k(x+d/2)).$$

   On en déduit l'expression totale, en utilisant la formule de trigonométrie $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$:

   - $x \leqslant -d/2$:
   $$2A_0\cos(\omega t + kx)\cos\left(\frac{kd}{2}\right),$$
   onde régressive d'amplitude $2A_0\cos\left(\frac{kd}{2}\right)$.
   - $x \geqslant d/2$:
   $$2A_0\cos(\omega t - kx)\cos\left(\frac{kd}{2}\right),$$
   onde progressive de même amplitude $2A_0\cos\left(\frac{kd}{2}\right)$.
   - $-d/2 \leqslant x \leqslant d/2$:
   $$2A_0\cos\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)\cos(kx).$$

   Dans ce dernier cas l'onde n'est ni progressive ni régressive car on a découplage des variations spatiale et temporelle. On ne peut plus définir de vitesse de phase car en chaque point la phase de l'oscillation est la même à chaque instant : la phase ne se « déplace » pas et on dit que l'onde est *stationnaire*.

   On observe ce comportement car dans cette zone on a deux ondes se propageant en sens inverse (contrapropageantes) : d'une certaine manière, la somme algébrique de leurs vitesses de phase est nulle (attention ceci n'est vrai que par ce qu'elles sont synchrones et de même amplitude).

2. On pourra avoir dans la zone d'onde stationnaire une amplitude nulle en $x = d/4$ si, avec $p \in \mathbb{Z}$:
   $$\cos(kd/4) = 0 \rightarrow \frac{kd}{4} = \left(p+\frac{1}{2}\right)\pi \quad ie : d = (2p+1)\lambda.$$
   En effet, pour $d = \lambda$ par exemple l'onde issue de $H1$ (resp. $H2$) doit alors parcourir $3\lambda/4$ (resp. $\lambda/4$) et elles arrivent donc en opposition de phase en $x = d/4$.

L'amplitude est alors $2A_0\left|\cos(kx)\right|$.

L'amplitude est la même quelle que soit x pour $|x| > d/2$, égale à $\left|\cos\left(\frac{kd}{2}\right)\right|$. Elle sera maximale pour :

$$\cos(\frac{kd}{2}) = p\pi \to d = p\lambda.$$

En effet l'onde issue de H_1 aura parcouru un nombre entier de fois λ quand elle atteindra H_2 : leur interférence sera alors constructive.

On a maintenant, pour $x \geqslant d/2$:

$$\begin{aligned} A &= A_0\cos\left(\omega t - k(x+d/2)\right) + A_0\cos\left(\omega t - k(x-d/2)+\varphi\right) \\ &= 2A_0\cos\left(\omega t - kx + \varphi/2\right)\cos\left(kd/2+\varphi/2\right). \end{aligned}$$

. On a ici $\lambda = c/f = 16{,}5\,\mathrm{cm}$. L'amplitude sera désormais nulle pour :

$$\frac{kd}{2} + \frac{\varphi}{2} = \left(p+\frac{1}{2}\right)\pi \to \varphi = \left(2p+1\right)\pi - \frac{\pi d}{\lambda} = 38° \mod 360°.$$

Correction de l'exercice 3

1. $t = 0$ La première onde a ses maxima en $x = 0[\lambda]$, avec $\lambda = c/f$ sa longueur d'onde. Pour la deuxième onde ils sont à $x = d[\lambda]$.

   $t = 1/(2f)$ Les ondes ont progressé de $\Delta x = c/(2f) = \lambda/2$. Les maxima de la première sont désormais en $x = \lambda/2[\lambda]$ et deux de la deuxième en $x = d + \lambda/2[\lambda]$,

   $t = 1/(4f)$ Les ondes ont progressé de $\Delta x = c/(4f) = \lambda/4$. Les maxima de la première sont désormais en $x = \lambda/4[\lambda]$ et ceux de la deuxième en $x = d + \lambda/4[\lambda]$.

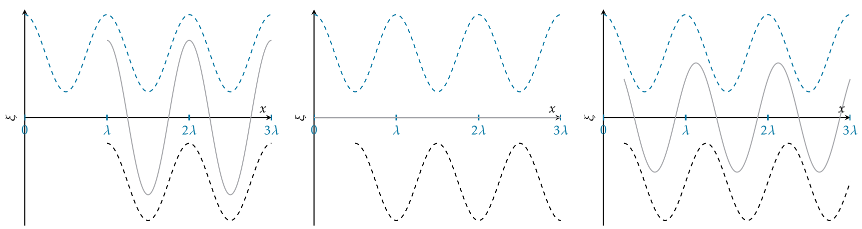
2. Les trois ondes somme sont sinusoïdales de fréquence f.

   $d = c/(f)$ Les ondes sont en phase, on a une onde d'amplitude double.

   $d = c/(2f)$ Les ondes sont en opposition de phase, la somme est nulle.

   $d = c/(4f)$ Les maxima de la somme sont entre $x = 0[\lambda]$ et $x = \lambda/4[\lambda]$.

   On illustre ces résultats sur la figure suivante.



3. L'onde somme a pour expression, dans tous les cas :

$$\cos\left(2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) + \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x-d}{c}\right)\right).$$

   Les deux premiers cas sont évidents. Pour le dernier, on met cette expression sous la forme $X\cos(2\pi(t-\frac{x}{c}+\varphi))$ au moyen d'une construction de Fresnel. On obtient $X = \sqrt{2}$ et $\varphi = -22{,}5°$ en accord avec la figure précédente : on y vérifie en particulier que l'onde est en retard par rapport à l'origine puisque $-\pi < \varphi < 0$.

Correction de l'exercice 4

Si la figure est immobile, on peut penser qu'une crête a remplacé la suivante entre deux flashs du stroboscope. La distance $d = 5\,\mathrm{mm}$ est alors la longueur d'onde. Sous cette hypothèse la durée nécessaire pour que l'onde parcourt une longueur d'onde d est la période du stroboscope $T = 1/f$. On calcule alors la célérité $c = df = 40\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

L'interprétation peut cependant être plus complexe :

- l'onde peut avoir parcouru un nombre entier de fois sa longueur d'onde entre deux flashs du stroboscope ; la célérité c sera alors un multiple de celle déterminée précédemment.
- l'onde peut également avoir parcouru une fraction entière ($1/n$ avec n entier) de sa longueur d'onde. Si la fréquence est suffisamment élevée, la persistence rétinienne donnera l'illusion que pendant n flash, les crêtes placées successivement en $0, \lambda/n, 2\lambda/n\ldots$ sont observées simultanément. Dans ce cas la distance entre crête observée est une fraction de la longueur d'onde et la véritable célérité sera un multiple de celle déterminée précédemment.

Correction de l'exercice 5

Pour passer d'un do au do suivant, on doit multiplier la fréquence 12 fois par le même rapport r pour arriver à un facteur 2. On a donc $r = 2^{1/12}$.

1. Pour passer du do2 au do3, on doit multiplier par 2, on doit encore compter 9 intervalles soit un rapport : $2 \times 2^{9/12} = 3{,}363$. On mesure par ailleurs $440/130{,}8 = 3{,}363$. Ces deux valeurs sont calculées à 1 près, ce qui correspond à l'ordre de grandeur de l'incertitude sur les fréquences.

2. Les fréquences des harmoniques sont :

rang	1	2	3
do2	130,8	261,6	392,4
sol2	196	392	588

.

On constate que l'harmonique de rang 3 du do2 est très proche de l'harmonique de rang 2 du sol2 : la somme de ces deux sons produira un battement de fréquence $392{,}4 - 392 = 0{,}4\,\text{Hz}$, soit de période $2{,}5\,\text{s}$.

3. Entre chacune des notes on a 7 intervalles, soit un rapport $2^{7/12} = 1{,}498$ proche de $3/2$ comme on l'a constaté sur l'exemple précédent. En le choisissant rigoureusement égal à $3/2$, les battements évoqués disparaîtront puisque l'harmonique de rang 3 d'une corde aura exactement la fréquence de l'harmonique de rang 2 de la suivante. Les fréquences seront donc :

note	do2	sol2	ré3	la3
fréquence	130,4	195,6	293,3	440

, légèrement différentes du cas précédent.

Correction de l'exercice 6

1. On lit une quatre longueurs d'onde entre les deux sources distantes de $8\,\text{cm}$. On a donc $\lambda = 2{,}0\,\text{cm}$, soit une fréquence $\nu = c/\lambda = 20\,\text{Hz}$.

2. Sur les images 1b et 1c l'excitation est nulle entre les deux sources. Comme cette zone correspond à une onde stationnaire, on en déduit que les instants correspondants (notés t_b et t_c) sont séparés d'un multiple d'une demi-période. De plus le reste de la figure n'est pas identique : l'onde est donc en opposition de phase entre ces deux instants : on a donc $|t_c - t_b| = (p + 1/2)T$, avec T la période et $p \in \mathbb{N}$.

   Sur l'image 1a en revanche, l'excitation dans la zone d'onde stationnaire est maximale, l'onde y est donc en quadrature par rapport aux deux autres images, soit $|t_a - t_b| = (2q + 1) + T/4$, avec $q \in \mathbb{N}$. La plus petite durée Δt est donc $T/4$ et les trois instants sont alors séparés d'un quart de période exactement, soit $\Delta t = T/4 = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\,\text{s}$.

   Enfin, en regardant la zone d'onde progressive, à droite de la source A par exemple, on constate que la frange sombre située sur la source A sur l'image 1b a progressé d'un ¼ de longueur d'onde sur l'image 1a et encore de la même distance sur l'image 1c. La chronologie est donc : image 1b → image 1a → image 1c.

3. (a) Au point A, l'excitation est toujours nulle. En effet, on peut lire que les distances entre chacune des sources et ce point sont $10\,\text{cm}$ et $3\,\text{cm}$, elles diffèrent donc de $7\,\text{cm}$, soit $3{,}5 \times \lambda$. Les ondes interfèrent bien destructivement en ce point.
   (b) Au point B, l'excitation oscille avec une amplitude maximale. On lit ici que les distances aux deux sources sont respectivement $9{,}5\,\text{cm}$ et $5{,}5\,\text{cm}$. Elles diffèrent de $2 \times \lambda$: les ondes interfèrent bien constructivement en ce point.

Correction de l'exercice 7

1. Le milieu traversé par l'onde est le même qu'on soit dans ou hors des tubes. Avec n l'indice de l'air, on calcule la différence de marche δ et l'interfrange i à cette approximation :

$$\delta = n\frac{2ay}{D} \rightarrow i = \frac{\lambda D}{2an} = 9{,}5\,\mu\text{m}.$$

   Il faudra utiliser une loupe ou un microscope pour pouvoir les distinguer à l'œil et pour pouvoir utiliser un détecteur photométrique pour compter les franges qui défilent.

   Notons que par symétrie du dispositif, la frange en $y = 0$ est claire puisque les chemins optiques qui y parviennent en provenant de S et en passant par S_1 ou S_2 sont égaux.

2. (a) En faisant le vide dans le tube situé devant S_1, on diminue le chemin optique de la lumière à travers ce tube. Le retard de phase en S_1 par rapport à S est donc inférieur à celui en S_2 : la phase en S_1 est inférieure à celle en S_2. La frange claire correspondant à l'égalité des chemins optiques, qui était initialement en $y = 0$, sera donc maintenant en un point M où le retard de phase acquis entre S_1 et M est supérieur à celui acquis entre S_2 et M. Il faut pour cela aller vers les y négatifs : les franges se déplacent vers le bas.
   (b) Notons N le nombre de franges qui défilent en $y = 0$. La frange claire présente au point O d'ordonnée $y = 0$ est donc celle dont la différence de marche $\mathscr{L}_{SS_1O} - \mathscr{L}_{SS_2O}$ était précédemment $-N\lambda$.
   Par ailleurs, la différence de chemin optique au point O est maintenant :

$$\delta = \mathscr{L}_{SS_1O} - \mathscr{L}_{SS_2O} = \left(\mathscr{L}_{SS_1} - \mathscr{L}_{SS_2}\right) + \left(\mathscr{L}_{S_1O} - \mathscr{L}_{S_2O}\right) = -(n-1)\,e,$$

   car quand le premier trajet comporte e pour la traversée du tube, le deuxième comporte ne.
   On a donc :

$$N\lambda = (n-1)e \rightarrow n - 1 = \frac{N\lambda}{e} \rightarrow n - 1 \in [2{,}7 \cdot 10^{-4}; 2{,}8 \cdot 10^{-4}].$$

   Ceci est compatible avec la loi de Gladstone qui donne les variations de l'indice de l'air avec la température $n - 1 = 0{,}082/T = 2{,}75 \cdot 10^{-4}$ pour $T = 298\,\text{K}$.

Correction de l'exercice 8

1. On branche les émetteurs en dérivation pour qu'ils reçoivent le même signal : ils seront alors en phase. La différence de marche est alors, comme vu en cours :

$$\delta = \sqrt{D^2 + (y+a/2)^2} - \sqrt{D^2 + (y-a/2)^2}.$$

Pour les valeurs numériques considérées, on peut effectuer l'approximation $y \gg a$ et $D \gg a$ mais l'approximation $D \gg y$ est moins satisfaisante[i]. Si on ne la fait pas, le calcul mené en cours donne alors :

$$\delta \simeq \frac{ay}{\sqrt{D^2+y^2}}.$$

On obtient alors des interférences constructives pour $\delta = 0 \mod \lambda$, soit $y/\sqrt{D^2+y^2} = k\lambda/a$, avec $k \in \mathbb{Z}^\star$.

2. On vérifie avec les valeurs suivantes :

rang	−3	−2	−1	1	2	3
$\frac{ay}{k\sqrt{D^2+y^2}}$ (mm)	7,2	8,1	8,0	8,5	7,5	7,3

qu'on obtient un accord raisonnable avec le modèle qui prédit une valeur constante égale à λ. On en déduit, en calculant la moyenne et l'incertitude-type : $\lambda = 7{,}8(50)\,\mathrm{mm}$, puis $f = c/\lambda = 42(3)\,\mathrm{kHz}$.

L'expression de δ précédente donne :

- si on rapproche les sources d'un facteur $3/5$, les valeurs de y vont toutes être multipliées par $5/3$;
- si on remonte les deux sources de 2 cm, l'ensemble de la figure sera centrée sur la nouvelle projection O' du milieu des deux trous. L'ensemble de la figure sera translatée de 2 cm selon Oy.
- Si on augmente D d'un facteur $3/2$, on peut recalculer les nouvelles valeurs de y avec l'expression de δ ou utiliser l'approximation $\sqrt{D^2+y^2} \simeq D$ pour conclure que les positions y seront multipliées par environ le même facteur $3/2$.

[i] Remarquons que dans le pire cas, $y = 48{,}7\,\mathrm{cm}$, $\sqrt{D^2+y^2} = 1{,}11\,\mathrm{m}$, conduisant à une erreur de 11% si on approxime $\sqrt{D^2+y^2} = D^2$.

Correction de l'exercice 9

1. On utilise la formule de la différence de marche à l'infini pour le dispositif de deux trous d'Young distants de $a/2$. On obtient, dans la direction θ :

$$\delta = \frac{a\sin(\theta)}{2},$$

avec λ la longueur d'onde dans le milieu considéré.

2. Si les interférences entre la source du bord et celle du centre sont destructives, elles seront de même destructives pour toute paire de sources distantes de $a/2$. Il suffit donc d'avoir :

$$\delta = (2p+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow \sin(\theta) = (2p+1)\frac{\lambda}{a} \quad p\in\mathbb{Z}.$$

Remarquons qu'on aura aussi des interférences destructives pour $\delta = 2p\frac{\lambda}{a}$: en considérant des partitions plus fines de fentes. Pour $\delta = 8\lambda$ par exemple, les interférences seront destructives entre chaque 1/16 de fente.

Le cas $p = \pm 1$ donne la largeur de la tâche centrale de diffraction pour une fente :

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{a}.$$

Considérons maintenant une construction de Fresnel : le déphasage $\Delta\varphi_0$ entre deux sources voisines est $2\pi\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2\pi a\sin(\theta)}{(N-1)\lambda}$. Les interférences seront destructives si la construction de Fresnel de la somme des N vecteurs donne le vecteur nul, soit si (voir l'illustration sur) :

$$N\Delta\varphi_0 = 2p\pi \quad \text{avec : } \Delta\varphi_0 < 2\pi \quad \text{soit : } \sin(\theta) = \frac{p\lambda(N-1)}{\lambda N} 1 \leqslant p < N.$$

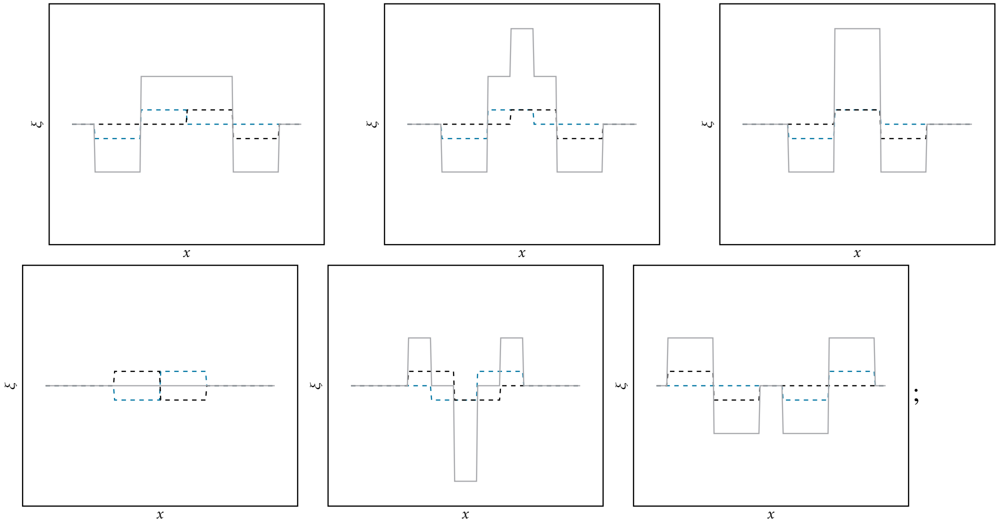
On reconnaît les arguments des $N-1$ racines N^{e} de l'unité différentes de 1. Pour N tendant vers l'infini, on retrouve bien, pour p quelconque :

$$\sin(\theta) = \frac{p\lambda}{a}$$

Notons pour conclure que dans tous les cas le nombre d'angles réalisant ces interférences destructives sera fini puisque, comme $|\sin(\theta)| < 1$, on doit avoir $p \leqslant a\lambda$.

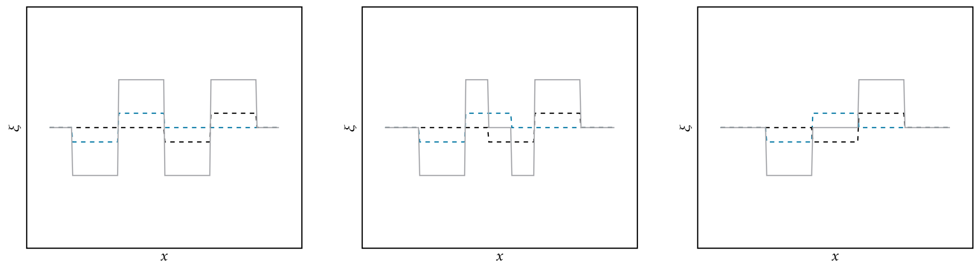
Correction de l'exercice 10

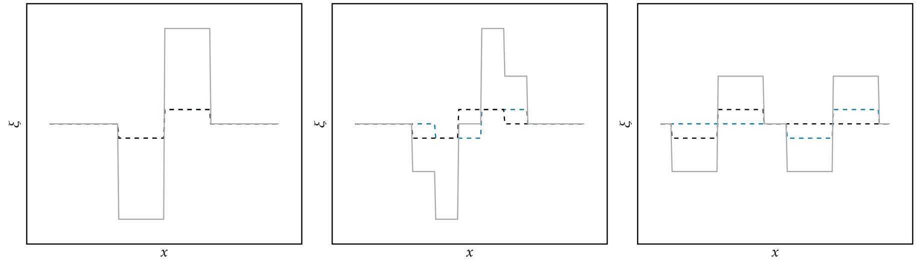
Dans le cas où les deux ondes sont en phase à l'instant initial on obtient les profils suivants dans lesquels les ondes contrapropageantes sont en traits interrompus et leur somme en trait continu. Les amplitudes des ondes individuelles ont été diminuées d'un facteur $1/3$ pour faciliter la lecture.



;

Dans le cas où elles sont en opposition de phase, on obtient :

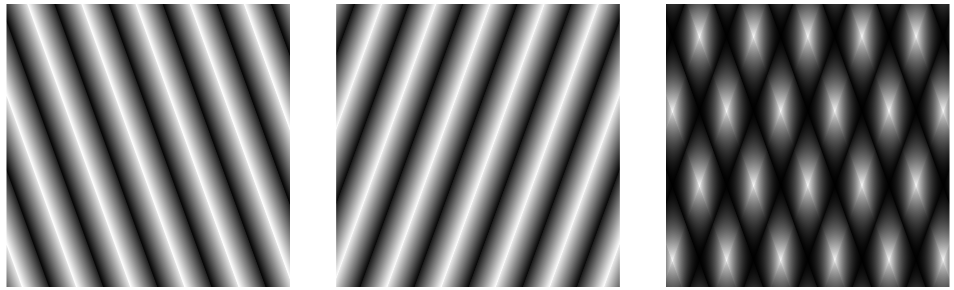




;

Correction de l'exercice 11

1. Les deux ondes séparément donnent les deux premières figures représentées ci-dessous. Leur somme donne la troisième, pour $\alpha = 40$. La figure d'interférences « défile » ensuite uniquement selon $\overrightarrow{e_y}$, à la vitesse $f\lambda/\sin(\alpha/2)$.



2. Le vecteur d'onde a pour norme $k = 2\pi/\lambda$. Posons $k_x = k\cos(\alpha/2)$ et $k_y = k\sin(\alpha/2)$. Le retard en un point de coordonnées (x, y) peut s'écrire pour la première onde comme $k_x x + k_y y$.

   Pour la première onde, on peut écrire la perturbation comme :

   $$\xi_1 = A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y\right).$$

   Pour la deuxième, c'est :

   $$\xi_2 = A\cos\left(\omega t + k_x x - k_y y\right).$$

   La somme est :

   $$\xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(\omega t - k_y y)\cos(k_x x).$$

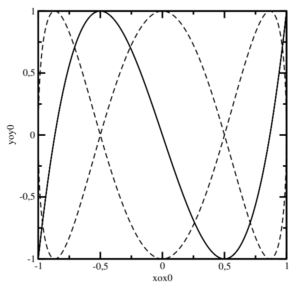
   On reconnaît le produit d'une onde progressive selon $\overrightarrow{e_y}$ multipliée par une enveloppe d'onde stationnaire selon $\overrightarrow{e_x}$.

Correction de l'exercice 12

1. Si la trajectoire est fermée, il existe au moins une date t et une durée T tels que $M(t) = M(t+T)$, soit : $\begin{cases} \cos\omega_x(t+T) & = \cos\omega_x t \\ \cos\omega_y(t+T) & = \cos\omega_y t \end{cases}$, soit $\begin{cases} \omega_x T & = 2p\pi \\ \omega_y T & = 2q\pi \end{cases}$, soit encore $\omega_x/\omega_y \in \mathbb{Q}$: les deux pulsations sont dites *commensurables*. Comme les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont alors périodiques, la trajectoire est périodique, et une période en est $T = 2p\pi/\omega_x = 2q\pi/omega_y$.

2. La plus petite période du mouvement est ici $2\pi/\omega_x$. On détermine la trajectoire sur l'intervalle $[0;\pi/(2\omega_x)]$, le reste s'en déduira par des symétries simples.

   $0 \leqslant \omega_x t \leqslant \pi/2 \to 0 \leqslant \omega_y t \leqslant 3\pi/2$. Sur cet intervalle, y décroît de 1 à -1 puis croît de 1 à 0.

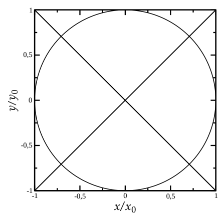
   

   $\pi/2 \leqslant \omega_x t \leqslant \pi$ On a $x(t) = -x(\pi/\omega_x - t)$, avec $\pi/\omega_x - t$ compris dans l'intervalle précédent et de même $y(t) = -y(\pi/\omega_x - t)$. La trajectoire sur ce domaine est la symétrique par rapport à l'origine de la trajectoire sur $[0,\pi/(2\omega_x)]$.

   $-\pi/2 \leqslant \omega_x t \leqslant 0$**.** Puisque $x(t)$ et $y(t)$ sont paires, cette partie de la courbe est identique à celle pour $[0;\pi/(2\omega_x)]$.

   La trajectoire pour $(\omega_y = 3\omega_x; \varphi = 0)$ est représentée sur la figure ci-dessus en trait continu. On y a également représenté, en traits interrompus, la trajectoire correspondant à $(\omega_y = 3\omega_x; \varphi = \pi/2)$.

3. $(\omega_x = \omega_y; \varphi = 0)$ **:** on a $x/x_0 = y/y_0$, la trajectoire est une droite de pente $+1$,

   $(\omega_x = \omega_y; \varphi = \pi/2)$ **:** on a $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$, la trajectoire est un cercle,

   $(\omega_x = \omega_y; \varphi = \pi)$ **:** on a $x/x_0 = -y/y_0$, la trajectoire est une droite de pente -1.

4. Le point D est atteint pour $x = 0, y > 0$, soit (pour $x_0 > 0$ et $y > y_0$ et $\varphi > 0$) $\omega_t = 3\pi/2$ où y vaut $y_D = y_0\cos(3\pi/2 + \varphi) = y_0 \sin\varphi = y_C \sin\varphi$ puisque le maximum atteint par y, égal à y_C est y_0. On a donc :

$$|\sin\varphi| = \frac{B'B}{A'A} = \frac{D'D}{C'C},$$

en considérant les autres points. On doit utiliser une valeur absolue car si φ est négatif, le même raisonnement sera tenu avec les points D' et C'. Cette technique ne permet donc pas de déterminer le signe de la phase.